2018

MATHEMATICS – GENERAL

Second Paper

Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as applicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

Module–III

পূর্ণমান ঃ ৫০

বিভাগ - ক

মান ঃ ২৫

১ নং প্রশ্ন এবং ***যে কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

১। (ক) ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) যদি তিনটি সেট $A = \{p, q, r\}$, $B = \{s, t, u\}$ এবং $C = \{s, u\}$ তবে দেখাও যে,

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ ।

(আ) প্রমাণ করো যে, $\alpha = (0,1)$ কে সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}^2$ তে $\beta = (2,1)$ ও $\gamma = (3,2)$-এর রৈখিক সমন্বয়রূপে প্রকাশ করা যায়।

(ই) দেখাও যে, কোনো দলে একের বেশি একক উপাদান থাকতে পারে না।

(খ) ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) দেখাও যে $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ যেখানে $f(n) = 2n - 1$ ($\mathbb{N}$ হ'ল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্) চিত্রণটি ঐকিক (one-one) কিন্তু পরিব্যপ্ত (onto) নয়।

(আ) যদি $\mathbb{R}^*$ সাধারণ গুণ প্রক্রিয়ায় অধীনে -শূন্য ব্যতীত সমস্ত বাস্তব সংখ্যার দল (group) নির্দেশ করে এবং H সমস্ত ধণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট্ নির্দেশ করে তবে H $\mathbb{R}^*$এর একটি উপদল (subgroup) কিনা নির্দেশ করো।

(ই) $S = \{(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)\}$ সেট্‌টি বাস্তব দেশ $\mathbb{R}^3$-এর একটি বুনিয়াদ গঠন করে কিনা পরীক্ষা করো।

২। (ক) G একটি দল এবং a ঐ দলের একটি উপাদান। $f_a: G \to G$ একটি চিত্রণ যেখানে, $f_a(x) = x \circ a$, $x \in G$। দেখাও যে f_a চিত্রণটি এৈকেক এবং পরিব্যাপ্ত।

(খ) কোনো দেশ V -এর উপদেশের সংজ্ঞা দাও। S একটি $\mathbb{R}^3$-এর উপসেট যেখানে, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$, তাহলে S উপসেটটি $\mathbb{R}^3$-এর উপদেশ কিনা পরীক্ষা কর।

(গ) যদি G একটি দল এবং $H = \{y \in G : xy = yx, \forall x \in G\}$ হয় তাহলে প্রমাণ কর, H, G-এর একটি উপদল। ৩+(১+৩)+৩

৩। (ক) দেখাও যে, ম্যাট্রিক্স গুণ এর অধীনে $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ একটি দল গঠন করে।

(খ) ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; দেখাও যে 5, A ম্যাট্রিক্স-এর একটি যথার্থ মান। ঐ যথার্থ মানের পরিপ্রেক্ষিতে উক্ত ম্যাট্রিক্সের একটি ভেক্টর নির্ণয় কর।

(গ) কোনো দেশের বুনিয়াদ (Basis)-এর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে $S = \{(2,1,1), (1,2,1)$ এবং $(1,1,2)\}$, $\mathbb{R}^3$ (বাস্তব দেশ)-এর একটি বুনিয়াদ গঠন করে। ৩+(১+২)+(১+৩)

৪। (ক) কোনো দেশ V-এর মাত্রার সংজ্ঞা দাও। W একটি $\mathbb{R}^3$-এর উপদেশ যেখানে,

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0, 2x + y + 3z = 0\}$। W -এর একটি বুনিয়াদ এবং মাত্রাটি নির্ণয় কর।

(খ) সেট $\{(1,2,1), (2,1,1)\}$ কে $\mathbb{R}^3$-এর একটি বুনিয়াদে (Basis)-এ উন্নিত কর।

(গ) $(G, \circ)$ একটি দল এবং $a \in G$ । প্রমাণ কর $aG = G$, যেখানে $aG = \{a \circ g : g \in G\}$। (১+৩)+৩+৩

৫। (ক) দেখাও যে, গুণের সাপেক্ষে $\{1, \omega, \omega^2\}$ যেখানে $\omega^3 = 1$ একটি দল গঠন করে।

(খ) প্রমাণ কর $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ ম্যাট্রিক্সের চক্রটি ম্যাট্রিক্স যোগ এবং গুণ-এর অধীনে একটি ক্ষেত্র গঠন করে। ($\mathbb{R}$-সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট)

(গ) দেখাও যে, $5x^2 + y^2 + 10z^2 - 4yz - 10zx$ বাস্তব দ্বিঘাত আকারটি ধনাত্মক সুনির্ণীত। ৩+৩+৪

বিভাগ - খ

মান ঃ ২৫

৬ নং প্রশ্ন এবং ***যে কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

৬। (ক) ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) দুটি সরলরেখার দিক নির্দেশকের অনুপাত যথাক্রমে 1,1,2 এবং $\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 4$ হলে, এদের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর।

(আ) $(-2, 3, 4)$ বিন্দু দিয়ে এবং yz তলের সমান্তরাল সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ই) $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ এবং $(-4, 9, 6)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমকোণী— প্রমাণ কর।

(খ) ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দুটি মূলবিন্দুতে এবং ভূমি $x = a; y^2 + z^2 = b^2$ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

(আ) কোনো গোলকের ব্যাসের দুই প্রান্তের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 4, -1)$ এবং $(-4, 2, 3)$ হলে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ই) দেখাও যে, $2x + 2y - z - 6 = 0 = 2x + 3y - z - 8$ সরলরেখাটি একটি স্থানাঙ্ক সমতলের সমান্তরাল।

৭। (ক) $P(a, b, c)$ বিন্দু থেকে $x = 0, y = 0, z = 0$ সমতল তিনটির উপর PL, PM, PN তিনটি লম্ব অঙ্কিত হল। প্রমাণ কর LMN সমতলের সমীকরণ হল $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$।

(খ) $(0, -2, -4)$ এবং $(2, -1, -1)$ বিন্দুদ্বয়গামী যে গোলকের কেন্দ্র $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$ সরলরেখার উপর অবস্থিত, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(গ) স্থানাঙ্ক অক্ষত্রয় এবং $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}, \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ সরলরেখাগুলি দিয়ে চলমান শঙ্কুটির সমীকরণ হল $3yz + 10zx + 6xy = 0$ — প্রমাণ কর। ৪+৩+৩

৮। (ক) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ এবং $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ সরলরেখা দুটির মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব বার কর।

(খ) দেখাও যে, কোনো ঘনকের দুটি কর্ণের মধ্যবর্তী কোণ $cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$।

(গ) $P(2, -3, 4)$ এবং $(-1, 0, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ PQ ব্যাসবিশিষ্ট গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪+৩+৩

৯। (ক) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ সরলখোটি $x - y + z = 5$ সমতলের যে বিন্দুতে ছেদ করে তার থেকে $(-1, -5, -10)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) স্থানাঙ্ক অক্ষ তিনটির সাথে সমান্তরাল এবং $(1, -2, 4), (3, -4, 5)$ বিন্দুগামী সমতলগুলি নির্ণয় কর।

(গ) একটি গোলক যার কেন্দ্রবিন্দু $2x - 3y = 0 = 5y + 2z$ সরলরেখাটির উপর অবস্থিত এবং $(0, -2, -4)$, $(2, -1, -1)$ বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪+৩+৩

১০। (ক) একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুটি O বিন্দুতে এবং অক্ষটি স্থানাঙ্ক অক্ষ তিনটির সাথে সমান কোণে অবস্থিত। শঙ্কুটি O বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা দিয়ে চলে যার কোসাইন দিগন্তগুলির অনুপাত $-1, -2, 2$। শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 5 = 0$ গোলকের সেই স্পর্শতলগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 2y - z = 0$ সমতলের সমান্তরাল।

(গ) যখন একটি সরলরেখা কার্তেসীয় অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে তখন ওই রেখার কোসাইন দিগন্তগুলির মান নির্ণয় কর। ৪+৪+২

Module–IV

পূর্ণমান ঃ ৫০

বিভাগ - ক

মান ঃ ২৫

১১ নং প্রশ্ন ও অন্য *যে কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

১১। (ক) ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) দেখাও যে, f অপেক্ষকটির একটি বিন্দুতে চরম বা অবম মান থাকা, সেই বিন্দুতে $f'(x) = 0$ নির্দেশ করে না।

(আ) Rolle's -এর উপপাদ্য, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, x \in [-1, 1]$ অপেক্ষকের জন্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

(ই) যদি $U = xlog_e y (y > 0)$, হয় দেখাও যে, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$।

(খ) ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) মান নির্ণয় কর : $\lim_{x \to 0} \left\{\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x+1)}\right\}$.

(আ) যদি $u(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x+y}$ হয়, তবে $x.\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$-এর মান বের কর।

(ই) $f(x, y) = |x| + |y|$ অপেক্ষকটি (0,0) বিন্দুতে সন্তত কিনা যাচাই কর।

১২। (ক) যদি $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 \quad , & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$।

(খ) $\sin x$ কে x -এর অসীম শ্রেণীতে বিস্তৃত কর। ৫+৫

১৩। (ক) a, b-এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $\lim_{x \to 0} \frac{ae^x - b\cos x + e^{-x}}{x\sin x} = 2$।

(খ) যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ হয়, তবে দেখাও যে, $u_{xx} + u_{yy} + y_{zz} = \frac{-3}{(x+y+z)^2}$। ৫+৫

১৪। (ক) $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$ অপেক্ষকের চরম এবং অবম মান বের কর।

(খ) Implicit function উপপাদ্যের সাহায্যে $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$ কে $(2, 1)$ বিন্দুর নিকট $y = \varphi(x)$ আকারে প্রকাশ কর। ৫+৫

১৫। (ক) Lagrange's মধ্যম মান উপপাদ্যটি বিবৃত কর ও প্রমাণ কর।

(খ) যদি z, x ও y -এর অপেক্ষক হয় এবং $x = e^u + e^{-v}$ ও $y = e^{-u} - e^v$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$।

৫+৫

বিভাগ - খ

মান ঃ ১৫

১৬ নং প্রশ্ন ও অন্য ***যে কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

১৬। ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(ক) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ অভিসারী কিনা যাচাই কর।

(খ) মান নির্ণয় কর ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos^3 x dx$।

(গ) মান নির্ণয় কর ঃ $\int_0^2 \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y) dx dy$।

১৭। যদি $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx, n > 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$ । ৪

১৮। মান নির্ণয় কর ঃ $\iint_R (x^2+y^2) dx dy$; যেখানে $R: xy = 1, y = 0, y = x$ এবং $x = 2$ দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল। ৪

১৯। প্রমাণ কর যে, $\int_0^\infty e^{-x^4} x^2 dx \times \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$। ৪

২০। বক্ররেখা $y = x^3$ এবং $y = 2x$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

২১। $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$ দ্বারা প্রকাশিত বক্ররেখার পরিসীমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

বিভাগ - গ

মান ঃ ১০

২২। ***যে কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(ক) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x^2$ -এর পূরক অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = x \sin 2x$ -এর বিশেষ সমাকল নির্ণয় কর।

২৩। *যে কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×২

(ক) সমাধান কর ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = \cos 2x$

(খ) সমাধান কর ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 7y = e^x + e^{-x}$

(গ) সমাধান কর ঃ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^3$

(ঘ) সমাধান কর ঃ $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dy} + 4x = 3\sin 2t$, দেওয়া আছে যখন $t = 0$, তখন $x = 0$ এবং $\frac{dx}{dt} = 0$

The figures in the margin indicate full marks.

Module–III

Full Marks–50

Group–A

Marks–25

Answer ***Question No. 1*** and ***any two*** from the rest.

1. (a) Answer ***any one*** question: 2×1

(i) For the three sets $A = \{p, q, r\}$, $B = \{s, t, u\}$ and $C = \{s, u\}$, verify that $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

(ii) Prove that in a real vector space $\mathbb{R}^2$, the vector $\alpha = (0,1)$ can be expressed as a linear combination of $\beta = (2,1)$ and $\gamma = (3,2)$.

(iii) Show that in any group, there cannot be more than one identity element.

(b) Answer ***any one*** question: 3×1

(i) Show that the mapping $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ being the set of all natural numbers) defined by $f(n) = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$ is one-one but not onto.

(ii) Let $\mathbb{R}^*$ denote the group of all non-zero real numbers with respect to usual multiplication and H denote the set of all positive real numbers. Determine whether H is a subgroup of $\mathbb{R}^*$.

(iii) Find whether the set $S = \{(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)\}$ is a basis of the vector space $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Let G be a group and a be an element of G. Define a mapping $f_a: G \to G$ by $f_a(x) = x \circ a, x \in G$. Prove that f_a is a bijective mapping.

(b) Define a subspace of a vector space V. Let S be a subset of $\mathbb{R}^3$ defined by $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$. Then examine if S is a subspace of $\mathbb{R}^3$.

(c) Let G be a group and $H = \{y \in G : xy = yx, \forall x \in G\}$. Show that H is a subgroup of G. 3+(1+3)+3

3. (a) Prove that under matrix multiplication the set $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ and } ad - bc = 1\right\}$ is a group.

(b) Show that 5 is an eigen value of the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ and also find an eigen vector of the matrix corresponding to the eigen value 5.

(c) Define a basis of a vector space. Prove that the set $S = \{(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$ forms a basis of the real vector space $\mathbb{R}^3$. 3+(1+2)+(1+3)

4. (a) Define dimension of a vector space V. Find a basis and the dimension of the subspace W of $\mathbb{R}^3$, where $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0,\ 2x + y + 3z = 0\}$.

(b) Extend the set $\{(1,2,1), (2,1,1)\}$ to a basis of $\mathbb{R}^3$.

(c) Let G be a group and $a \in G$. Prove that $aG = G$; where $aG = \{a \circ g : g \in G\}$. (1+3)+3+3

5. (a) Prove that the set $\{1, \omega, \omega^2\}$ where $\omega^3 = 1$, forms a group with respect to multiplication.

(b) Prove that the ring of matrices $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ under matrix addition and multiplication form a field. ($\mathbb{R}$ is the set of all real numbers)

(c) Show that the quadratic form $5x^2 + y^2 + 10z^2 - 4yz - 10zx$ is positive definite. 3+3+4

Group–B

Marks–25

Answer ***Question No. 6*** and ***any two*** from the rest.

6. (a) Answer ***any one*** question: 2×1

(i) Find the angle between the straight lines whose direction ratios are 1,1,2 and $\sqrt{3} - 1$, $-\sqrt{3} - 1, 4$.

(ii) Find the equation of the plane passing through the points $(-2, 3, 4)$ and parallel to yz – plane.

(iii) Show that the triangle formed by the points $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ and $(-4, 9, 6)$ is right angled.

(b) Answer ***any one*** question: 3×1

(i) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin and base is the circle $x = a; y^2 + z^2 = b^2$.

(ii) Find the equation of the sphere which has $(3, 4, -1)$ and $(-4, 2, 3)$ as the end points of a diameter.

(iii) Show that the straight line $2x + 2y - z - 6 = 0 = 2x + 3y - z - 8$ is parallel to the coordinate plane.

7. (a) Perpendiculars PL, PM, PN are drawn from the point $P(a, b, c)$ to the co-ordinate planes. Show that equation of the plane LMN is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$.

(b) Find the equation of the sphere having its centre on the line $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$ and passing through the points $(0, -2, -4)$ and $(2, -1, -1)$.

(c) Show that the equation of the cone which passes through the co-ordinate axes and the straight lines $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ is $3yz + 10zx + 6xy = 0$. 4+3+3

8. (a) Find the shortest distance between the lines $\frac{x-3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ and $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

(b) Show that the angle between the two diagonals of a cube is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

(c) Find the equation of the sphere described on the line segment PQ, joining the points $P(2,-3,4)$ and $Q(-1,0,5)$ as diameter. 4+3+3

9. (a) Find the distance of the point of intersection of the line $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{12}$ and the plane $x-y+z=5$ from the point $(-1,-5,-10)$.

(b) Find the equations of the planes through the points $(1,-2,4)$, $(3,-4,5)$ and parallel to the co-ordinate axes.

(c) Find the equation of the sphere passing through the points $(0,-2,-4)$, $(2,-1,-1)$ and having its centre on the straight line $2x-3y=0=5y+2z$. 4+3+3

10. (a) The axis of a right circular cone with vertex O makes equal angle with the co-ordinate axes and the cone passes through the line drawn from O, with direction cosines proportional to –1, –2, 2. Find the equation of the cone.

(b) Find the equation of the tangent planes to the sphere $x^2+y^2+z^2-2y-6z+5=0$ which are parallel to the plane $2x+2y-z=0$.

(c) Find the direction cosines of the line that makes equal angles with the coordinate axes. 4+4+2

Module–IV

Full Marks–50

Group–A

Marks–25

Answer ***Question No. 11*** and ***any two*** from the rest.

11. (a) Answer ***any one*** question: 2×1

(i) Show that the existence of a maximum or a minimum value of a function f at certain point need not imply $f'(x)=0$ at that point.

(ii) Examine whether Rolle's theorem is applicable to the function $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ in $[-1,1]$.

(iii) If $U=x\log_e y (y>0)$, show that $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$.

(b) Answer ***any one*** question: 3×1

(i) Evaluate : $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right\}$.

(ii) If $u(x,y)=\frac{x^2y^2}{x+y}$, then find the value of $x.\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

(iii) Examine the continuity of the function $f(x,y)=|x|+|y|$ at the point $(0,0)$.

12. (a) If $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

then show that $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

(b) Expand $\sin x$ in an infinite series in power of x. 5+5

13. (a) Find the values of a, b such that $\lim_{x \to 0} \frac{ae^x - b\cos x + e^{-x}}{x\sin x} = 2$.

(b) If $u = \log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, then prove that $u_{xx}+u_{yy}+y_{zz} = \frac{-3}{(x+y+z)^2}$. 5+5

14. (a) Find the extreme value(s) of $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$.

(b) Use the Implicit function theorem to solve $x^2+xy+y^2-7=0$ in the form $y = \varphi(x)$ near the point $(2,1)$. 5+5

15. (a) State and prove Lagrange's Mean Value theorem.

(b) If z is a function of x and y and $x = e^u + e^{-v}$ and $y = e^{-u} - e^v$, then prove that $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$. 5+5

Group–B

Marks–15

Answer ***Question No. 16*** and ***any three*** from the rest.

16. Answer ***any one*** question: 3×1

(a) Examine the convergence of $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

(b) Evaluate : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos^3 x dx$.

(c) Evaluate : $\int_0^2 \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y)dxdy$.

17. If $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\, dx, n > 1$, then prove that $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$. 4

18. Evaluate : $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$ over the region R bounded by $xy=1, y=0, y=x$ and $x=2$. 4

19. Prove that $\int_0^\infty e^{-x^4}x^2dx \times \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$. 4

20. Find the area of the region bounded by the curve $y = x^3$ and the line $y = 2x$. 4

21. Find the perimeter of the curve represented by $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$. 4

Group–C

Marks–10

22. Answer ***any one*** question: 2×1

(a) Find the complementary function of $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=x^2$.

(b) Find the particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=x\sin 2x$.

23. Answer ***any two*** questions: 4×2

(a) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-y=\cos 2x$

(b) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+7y=e^x+e^{-x}$

(c) Solve : $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=2x^3$

(d) Solve : $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dy}+4x=3\sin 2t$, given when $t=0, x=0$ and $\frac{dx}{dt}=0$.