2020

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

Day 1

(বহু বিকল্পক নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী)

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ১×১০

(ক) যদি I ঘাতের ক্রিয়ায় সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ u থেকে ν তে পরিবর্তিত হয়, তবে গতিশক্তির পরিবর্তনের মান হবে

(অ) $\frac{1}{2} I(u+\nu)$ (আ) $\frac{1}{2} I(u-\nu)$

(ই) $2I(u+\nu)$ (ঈ) কোনোটিই নয়।

(খ) সরলরৈখিক গতিতে চলমান একটি কণার সরণ $x = \frac{1}{2}\nu t$, যেখানে ν হল গতিবেগ। তবে কণার ত্বরণ

(অ) ধ্রুবক (আ) ν^2

(ই) 0 (ঈ) t।

(গ) পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে *'h'* উচ্চতায় অবস্থিত m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার স্থিতিশক্তি হল

(অ) mgh (আ) gh

(ই) mg (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঘ) যদি কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে কোনো গতিশীল কণার কেন্দ্রীয় কক্ষপথটি একটি শঙ্কুচ্ছেদ $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ হয়, তবে বল সরলভেদে থাকবে

(অ) $\frac{1}{r^2}$ (আ) r^2

(ই) $\frac{1}{r}$ (ঈ) $\frac{1}{r^3}$ এর সঙ্গে।

(ঙ) যদি একটি কণা ধ্রুবক কৌণিক বেগে $r = ae^{\theta}$ বক্ররেখা বরাবর চলমান হয়, তবে কণাটির লম্ব-তারীয় ত্বরণ সরলভেদে থাকবে

(অ) r (আ) r^2

(ই) $\frac{1}{r}$ (ঈ) $\frac{1}{r^2}$ এর সঙ্গে।

(চ) যদি একটি বস্তুকণার ত্বরণের অভিলম্ব উপাংশ এবং স্পর্শক উপাংশ সমান হয়, তবে এর গতিবেগ নিম্নলিখিত কোনটির সঙ্গে সমানুপাতিক, যেখানে $tan\psi$ = স্পর্শকের নতি।

(অ) ψ (আ) e^{ψ}

(ই) $e^{2\psi}$ (ঈ) $e^{-\psi}$।

(ছ) এক অশ্বশক্তি ধ্রুবকের পরিমাপ কত হবে?

(অ) 746.3 ওয়াট (আনুমানিক) (আ) 750 ওয়াট (আনুমানিক)

(ই) 740 ওয়াট (আনুমানিক) (ঈ) কোনোটিই নয়।

(জ) যদি একটি বস্তুকণা y-অক্ষের সমান্তরালে একটি নির্দিষ্ট গতিবেগে এবং x-অক্ষের সমান্তরালে y-এর সমানুপাতী গতিবেগে গতিশীল হয়, তবে বস্তুকণাটির গতিবেগ হবে

(অ) একটি উপবৃত্ত (আ) একটি অধিবৃত্ত

(ই) একটি সরলরেখা (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঝ) একটি 2 kg. ভরকে 5 মিটার উচ্চতায় তুলতে কার্যের পরিমাণ হবে [g = 980 সে.মি/সেকেন্ড^2]

(অ) 98×10^7 *ergs* (আ) $9{\cdot}8 \times 10^7$ *ergs*

(ই) 9800 *ergs* (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঞ) সরল দোল গতিতে চলমান কোনো বস্তুকণার সমীকরণ $x = sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ হলে, এর দোলনের পর্যায়কাল হবে

(অ) 4 একক (আ) 2 একক

(ই) ½ একক (ঈ) কোনোটিই নয়।

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

২। (ক) কোনো চলমান বস্তুকণার অবস্থান *'t'* সময়ে $x = a\cos t$ এবং $y = a\sin t$ (a একটি ধ্রুবক) সমীকরণ দ্বারা নির্ধারিত হলে, এর গতিপথ, বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করো। ৫

(খ) প্রমাণ করো যে, বায়ুশূন্য স্থানে প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত। ৫

যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

৩। (ক) নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃত করো।

(খ) m ভরবিশিষ্ট একটি কণা $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$ আকর্ষক বলের অধীনে সরলরেখায় গতিশীল, যেখানে μ একটি ধ্রুবক। যদি মূলবিন্দু থেকে a দূরত্বে থেকে কণাটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে, তবে দেখাও যে $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$ সময়ে উহা মূলবিন্দুতে পৌঁছাবে। ২+৮

৪। (ক) কেপলারের গ্রহপথ সম্বন্ধিত সূত্রগুলি বিবৃত করো।

(খ) একটি বস্তুকণা $x^2 = 8y$ অধিবৃত্তাকার পথে এরূপ বলের অধীনে গতিশীল হয়, যা সর্বদাই y-অক্ষের সঙ্গে লম্ব। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো এবং কণাটির গতিপথের যে-কোনো একটি বিন্দুতে তার গতিবেগ নির্ণয় করো। ৩+৭

৫। (ক) প্রান্তিক গতিবেগের সংজ্ঞা দাও।

(খ) একটি কণাকে u গতিবেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বমুখে এমন একটি মাধ্যমে ছোঁড়া হল যার বাধা গতিবেগের বর্গের সমানুপাতী।

দেখাও যে কণাটি $\frac{V^2}{2g}\ log_e\left(1 + \frac{u^2}{V^2}\right)$ সর্বোচ্চ উচ্চতা লাভ করবে যেখানে V হল প্রান্তিক গতিবেগ। ২+৮

৬। একটি কণা প্রতি একক ভরে F কেন্দ্রীয় আকর্ষক বলের প্রভাবে সমতলে চলে। প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত প্রতীক ধরে দেখাও যে,

গতিপথের অবকলজ সমীকরণ হল $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F.$ ১০

৭। সমতলীয় বক্ররেখায় চলমান একটি কণার ত্বরণের স্পর্শক এবং অভিলম্ব উপাংশ নির্ণয় করো। ১০

৮। একটি স্থিতিস্থাপক স্ট্রিং-এর প্রান্তবিন্দু *'A'* টি স্থির এবং অপর প্রান্তবিন্দুটিতে একটি ভারী বস্তুকণা ঝোলানো আছে। স্ট্রিং-টির স্থিতিস্থাপকতা ধ্রুবকের (modulus of elasticity) মান বস্তুটির ওজনের সমান। ভারী বস্তুটিকে *'A'* বিন্দু থেকে নিক্ষিপ্ত করলে, বস্তুটি স্থির হওয়ার সময়ে স্ট্রিংটির দৈর্ঘ্য $(2 + \sqrt{3})\ a$ হবে। ১০

৯। *'H'* ধ্রুবক হারে কার্যরত একটি ইঞ্জিন একটি *'M'* ওজনবিশিষ্ট বস্তুকে *'R'* প্রতিবন্ধকতার বিরুদ্ধে টানছে। দেখাও যে এর সর্বোচ্চ

গতি H/R এবং এর অর্ধেক গতি প্রাপ্ত করতে ইঞ্জিনটির $\frac{MH\left(ln\,2 - \frac{1}{2}\right)}{R^2}$ পরিমাণ সময় লাগে। ১০

১০। একটি কণা $\frac{\mu}{(\text{দূরত্ব})^2}$ বলের অধীনে উপবৃত্তাকার পথে গতিশীল। (বলটি নাভিবিন্দু অভিমুখী) যদি বলের কেন্দ্র থেকে *'R'* দূরত্বে

কণাটি *'V'* বেগে প্রক্ষিপ্ত হয়, তবে এর পর্যায়কাল $\frac{2\Pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu}\right)^{-3/2}$ হবে দেখাও। ১০

Please Turn Over

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

MULTIPLE CHOICE QUESTIONS

1. Answer ***all*** the questions : 1×10

(a) For a rectilinear motion of a particle, if an impulse I changes its velocity from u to ν, then the change in Kinetic energy is

(i) $\frac{1}{2} I (u + \nu)$ (ii) $\frac{1}{2} I (u - \nu)$

(iii) $2 I (u + \nu)$ (iv) None of these.

(b) The law of motion in a straight line is $x = \frac{1}{2} \nu t$. The acceleration is

(i) f = const (ii) $f = \nu^2$

(iii) f = t (iv) $f = 0$.

(c) The potential energy of a particle of mass m at a height h above the Earth's surface is

(i) mgh (ii) mg

(iii) gh (iv) None of these.

(d) If the central orbit described by a particle moving under central force is the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$, then the force varies as

(i) $\frac{1}{r^2}$ (ii) r^2

(iii) $\frac{1}{r}$ (iv) $\frac{1}{r^3}$.

(e) If a particle moves along the curve $r = ae^{\theta}$ with constant angular velocity, then the cross-radial acceleration is proportional to

(i) r (ii) r^2

(iii) $\frac{1}{r}$ (iv) $\frac{1}{r^2}$.

(f) If the tangential and normal components of acceleration be equal, then the velocity is proportional to

(i) ψ (ii) e^{ψ}

(iii) $e^{2\psi}$ (iv) $e^{-\psi}$.

(g) Horse-Power =

(i) 746.3 watts (Approx) (ii) 750 watts (Approx)

(iii) 740 watts (Approx) (iv) None of these.

(h) If a particle is moving with a constant velocity parallel to the axis of y and velocity proportional to y parallel to the axis of x, then the path of the particle is

(i) an ellipse (ii) a parabola

(iii) a straight line (iv) None of these.

(i) The work done in raising a mass of 2 kg to a height of 5 meters is [g = 980 cm/sec^2]

(i) 98×10^7 *ergs* (ii) $9{\cdot}8 \times 10^7$ *ergs*

(iii) 9800 *ergs* (iv) None of these.

(j) For a Simple Hormonic motion defined by $x = sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ the time period is

(i) 4 unit (ii) 2 unit

(iii) ½ unit (iv) None of these.

Answer ***any one*** question :

2. (a) The position of a moving point at time t is given by $x = a \cos t$ and $y = a \sin t$. Find its path, velocity and acceleration. 5

(b) Prove that the path of a projectile in vacua is a parabola. 5

Answer ***any five*** questions :

3. (a) State Newton's second law of motion.

(b) A particle of mass m is acted on by a force $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$, μ being constant, towards the origin.

If it starts from rest at a distance a from origin, show that it will arrive at the origin in time $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$.

2+8

4. (a) State the Kepler's laws of planetary motion.

(b) A particle describes a parabola $x^2 = 8y$ under a force always perpendicular to y-axis. Find the law of force and the velocity of the particle at any point of its orbit. 3+7

Please Turn Over

5. (a) Define terminal velocity.

(b) A particle is projected vertically upwards with a velocity 'u' in a medium whose resistance varies as the square of the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is $\frac{V^2}{2g} \log_e\left(1 + \frac{u^2}{V^2}\right)$, where V is the terminal velocity. 2+8

6. A particle describes a plane curve under the action of a central attractive force F per unit mass. Prove that in usual notation the differential equation to the path of the particle is $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F$. 10

7. Find the expressions for tangential and normal components of velocity and acceleration of a particle moving in a plane. 10

8. One end of an elastic string is fixed at A and the other end is fastened to a heavy particle, the modulus of elasticity of the string being equal to the weight of the particle. Show that if the particle be dropped from A, it will descend a distance $(2 + \sqrt{3})\,a$ before coming to rest. 10

9. An engine working at a constant rate H, draws a load M against a resistance R. Show that the maximum speed is H/R and the time taken to attain half this speed is $\frac{MH\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)}{R^2}$. 10

10. A particle describes an ellipse under a force $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$, towards a focus. If it was projected with a velocity V from a point distant R from the centre of force, then show that the periodic time is $\frac{2\Pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu}\right)^{-3/2}$. 10