2021

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-B-1

(Advanced Calculus)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ denote the set of real numbers and the set of natural numbers respectively.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। সঠিক উত্তরটি লেখো ঃ ১×১০

(ক) মনে করো, $f_n(x)=\frac{x}{n}$, $x\in\mathbb{R}$, যেখানে $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, তাহলে $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি

(অ) 0-তে অভিসারিত হবে $\forall x\in\mathbb{R}$ (আ) x-এ অভিসারিত হবে $\forall x\in\mathbb{R}$

(ই) অপসারিত (ঈ) কোনোটাই নয়।

(খ) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(1-x),\ x\in[0,1]$ শ্রেণিটি

(অ) বিন্দু অনুযায়ী ও সমভাবে অভিসারী [0, 1] অন্তরালে

(আ) বিন্দু অনুযায়ী অভিসারী [0, 1] অন্তরালে, কিন্তু সমভাবে নয়

(ই) সমভাবে অভিসারী [0, 1] অন্তরালে, কিন্তু বিন্দু অনুযায়ী নয়

(ঈ) কোনোটাই নয়।

(গ) $f_n=\frac{\sin nx}{nx};\ n\in\mathbb{N};\ x\in(0,1)$ হয়, তাহলে $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি

(অ) অভিসারী হবে $\forall x$ (আ) অভিসারী হবে $\forall x$, ব্যতিক্রম $x = 0$

(ই) অপসারী হবে $\forall x$ (ঈ) অপসারী $\forall x$, ব্যতিক্রম $x = 1$।

(ঘ) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$, ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ

(অ) 0 (আ) 1

(ই) e (ঈ) ∞।

(ঙ) $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে, যদি $f(x)$ একটি পর্যাবৃত্ত ও সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয়, তাহলে কোনো একটি সাধারণ অসন্ততঃ বিন্দুতে $f(x)$ অভিসারী হবে

(অ) $f(x)$-এ (আ) $\frac{1}{2}[f(-x+0)+f(x-0)]$-এ

(ই) $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$-এ (ঈ) $\frac{1}{2}[f(x+0)-f(x-0)]$-এ।

(চ) $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে, যদি $f(x)$ যে-কোনো একটি অযুগ্ম অপেক্ষক হয় যার পর্যাবৃত্ত 2π, তাহলে অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণিটি হবে $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, যেখানে $b_n =$

(অ) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ (আ) $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

(ই) $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ (ঈ) $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ ।

(ছ) $\{f_n\}_n$ অপেক্ষকের অনুক্রমটির অভিসারী ডোমেন কত, যেখানে $f_n(x) = \frac{nx}{n+1}$?

(অ) $0 < x < \infty$ (আ) $-\infty < x < 0$

(ই) $-\infty < x < \infty$ (ঈ) $-1 < x < 1$।

(জ) $L\{e^{-at}\}$, $t > 0$-এর মান হল

(অ) a (আ) $\frac{a}{s}$

(ই) $\frac{1}{s-a}$ (ঈ) $\frac{1}{s+a}$ ।

(ঝ) Laplace রূপান্তরের সাহায্যে, $f(t) = t^2$-এর মান হল

(অ) $\frac{1}{s^3}$ (আ) $\frac{2}{s^3}$

(ই) $\frac{1}{s^2}$ (ঈ) $\frac{2}{s^2}$ ।

(ঞ) $L^{-1}\left\{\frac{\sin kt}{k}\right\}$-এর মান

(অ) $\frac{1}{s^2+k^2}$ (আ) $\frac{k}{s^2+k^2}$

(ই) $\frac{1}{s^2-k^2}$ (ঈ) $\frac{k}{s^2-k^2}$ ।

২। ***যে-কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৩

(ক) দেখাও যে, $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ এবং এই ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে, $\{f_n(x)\}_n ; [0,1]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী নয়, যেখানে $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, 0 \le x \le 1$ ।

(গ) দেখাও যে, $x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^3} + \ldots$ শ্রেণিটি [0, 1] অন্তরালে সমভাবে অভিসারী নয়।

(ঘ) নিম্নলিখিত অপেক্ষকটির $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে Fourier শ্রেণিতে বিস্তৃত করো ঃ $f(x) = \begin{cases} -1, & \forall -\pi < x < 0 \\ 1, & \forall\, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

প্রাপ্ত শ্রেণিটির সাহায্যে দেখাও যে, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots. = \frac{\pi}{4}$ ।

(ঙ) নিম্নলিখিত অপেক্ষকটির ল্যাপলাস রূপান্তর, $L\{F(t)\}$ বাহির করো ঃ $F(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ t-1 & , \quad \frac{1}{2} < t \le 1 \\ 0 & , \quad t \ge 1 \end{cases}$

৩। ***যে-কোনো চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) সমভাবে অভিসারী শ্রেণিটির জন্য Cauchy-র condition-এর বিবৃতি ও প্রমাণ করো। ২+৮

(খ) (অ) দেখাও যে, $\sum \frac{x}{(nx+1)\{(n-1)x+1\}}$ শ্রেণিটি যে-কোনো $[a, b]$ অন্তরালে $(0 < a < b)$ সমভাবে অভিসারী, কিন্তু $[0, b]$ অন্তরালে কেবলমাত্র pointwise অভিসারী।

(আ) ঘাত শ্রেণি সংক্রান্ত Abel-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

$x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{3^3x^3}{3!} + \ldots$ ঘাত শ্রেণির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো। ৫+৫

(গ) (অ) $\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$-এর ঘাত শ্রেণিটি ধরে নিয়ে প্রমাণ করো $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots = 1$

(আ) $\left\{nxe^{-nx^2}\right\}_n$, $x \geq 0$ অনুক্রমটি [0, K], $K > 0$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী নয়— প্রমাণ করো। ৫+৫

(ঘ) (অ) 2π পর্যায়বৃত্ত যুক্ত অপেক্ষক $f(x)$-এর Fourier শ্রেণিটি নির্ণয় করো, যেখানে $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ for } -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi x}{4} & , \text{ for } \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

(আ) $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে অপেক্ষক $f(x) = x^2$-এর Fourier শ্রেণিটি নির্ণয় করো এবং এর থেকে প্রমাণ করো যে

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$ ৫+৫

(ঙ) (অ) Laplace transform-এর scale ধর্ম পরিবর্তনের বিবৃতি দাও। এর থেকে মান নির্ণয় করো $L[\cos 6t]$।

(আ) Laplace রূপান্তর ব্যবহার করে সমাধান করো ঃ

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = e^{-t}\sin t;\ y = 0$ এবং $\frac{dy}{dt} = 0$ যখন $t = 0$ । (২+৩)+৫

(চ) (অ) মান নির্ণয় করো ঃ $L^{-1}\left\{\frac{5+s}{(s+1)\left(s^2+1\right)}\right\}$ ।

(আ) Laplace রূপান্তর ব্যবহার করে সমাধান করো ঃ

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4e^{2x};\ y(0) = -3$ এবং $y'(0) = 5$ । ৫+৫

(ছ) (অ) সঠিক বা ভুল যুক্তি সহকারে বলো ঃ

ঘাত শ্রেণিটি $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ যদি অভিসারী হয় $x = x_0$-তে, তাহলে এটা পুরোভাবে অভিসারী হবে $x = x_1$-তে, যখন $|x_1| < |x_0|$ ।

(আ) $\{f_n\}_n$ এই অপেক্ষকের অনুক্রমটি অভিসারী কি না পরীক্ষা করো, যেখানে $f_n(x) = \frac{x}{1+nx};\ n \in \mathbb{N};\ \forall x > 0$ ।

৫+৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Write the correct answer : 1×10

(a) For $n \in \mathbb{N}$, Let $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Then the sequence of functions $\{f_n\}_n$

(i) converges to 0 for all $x \in \mathbb{R}$ (ii) converges to x for all $x \in \mathbb{R}$

(iii) divergent (iv) none of these.

(b) The series $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x), x \in [0,1]$

(i) converges both pointwise and uniformly on [0, 1]

(ii) converges pointwise on [0, 1] but not uniformly on [0, 1]

(iii) converges uniformly on [0, 1] but not pointwise on[0, 1]

(iv) none of these.

(c) The sequence of functions $\{f_n\}_n$ where $f_n = \frac{\sin nx}{nx}; n \in \mathbb{N}; x \in (0,1)$

(i) converges for all x (ii) converges for all x except for $x = 0$

(iii) diverges for all x (iv) diverges for all x except for $x = 1$.

(d) The radius of convergence of the power series, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ is

(i) 0 (ii) 1

(iii) e (iv) ∞.

(e) If $f(x)$ is a bounded periodic and integrable on $[-\pi, \pi]$, then at a point of ordinary discontinuity, $f(x)$ converges to

(i) $f(x)$ (ii) $\frac{1}{2}[f(-x+0) + f(x-0)]$

(iii) $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ (iv) $\frac{1}{2}[f(x+0) - f(x-0)]$.

(f) If $f(x)$ is an arbitrary odd function in the interval $[-\pi, \pi]$ of period 2π, then the Fourier series of this function becomes $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, where $b_n =$

(i) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ (ii) $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

(iii) $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ (iv) $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

(g) The domain of convergence of the sequence of functions $\{f_n\}_n$ where $f_n(x) = \frac{nx}{n+1}$ is

(i) $0 < x < \infty$ (ii) $-\infty < x < 0$

(iii) $-\infty < x < \infty$ (iv) $-1 < x < 1$.

(h) The value of $L\{e^{-at}\}$ for $t > 0$ is

(i) a (ii) $\frac{a}{s}$

(iii) $\frac{1}{s-a}$ (iv) $\frac{1}{s+a}$.

(i) The value of the Laplace transform of $f(t) = t^2$ is

(i) $\frac{1}{s^3}$ (ii) $\frac{2}{s^3}$

(iii) $\frac{1}{s^2}$ (iv) $\frac{2}{s^2}$.

(j) The value of $L^{-1}\left\{\frac{\sin kt}{k}\right\}$ is

(i) $\frac{1}{s^2+k^2}$ (ii) $\frac{k}{s^2+k^2}$

(iii) $\frac{1}{s^2-k^2}$ (iv) $\frac{k}{s^2-k^2}$.

2. Answer ***any three*** questions : 5×3

(a) Show that $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ and find its radius of convergence.

(b) Show that the sequence of functions $\{f_n(x)\}_n$, defined as $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, 0 \le x \le 1$ is not uniformly convergent on [0, 1].

(c) Show that the series $x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + \frac{x^4}{(1+x^4)^3} + \ldots$ is not uniformly convergent on [0, 1].

(d) Find the Fourier series of $f(x)$ on $[-\pi, \pi]$ where $f(x) = \begin{cases} -1, & \forall -\pi < x < 0 \\ 1, & \forall\, 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Hence show that $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots. = \frac{\pi}{4}$.

(e) Find $L\{F(t)\}$ where L is Laplace transformation operator and

$$F(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ t-1 & , \quad \frac{1}{2} < t \le 1 \\ 0 & , \quad t \ge 1 \end{cases}$$

3. Answer ***any four*** questions :

(a) State and prove Cauchy's condition for uniform convergence of series. 2+8

(b) (i) Show that the series $\sum \frac{x}{(nx+1)\{(n-1)x+1\}}$ is uniformly convergent on any interval $[a, b]$, $0 < a < b$, but only pointwise on $[0, b]$.

(ii) State Abel's theorem on power series. Determine the radius of convergence of the power series, $x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{3^3x^3}{3!} + \ldots$ 5+5

(c) (i) Using power series of $\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$, show that $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots = 1$

(ii) Show that the sequence $\left\{nxe^{-nx^2}\right\}_n$, $x \geq 0$ is not uniformly convergent on $[0, K]$, $K > 0$. 5+5

(d) (i) Find the Fourier series of the periodic function $f(x)$ with period 2π defined as

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ for } -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi x}{4} & , \text{ for } 0 < x < \pi \end{cases}$$

(ii) Find the Fourier series expansion of the function $f(x) = x^2$ on $[-\pi, \pi]$ and deduce that

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$ 5+5

(e) (i) State change of scale property of Laplace transform. Using this evaluate $L[\cos 6t]$.

(ii) Solve by Laplace transformation : $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = e^{-t}\sin t;\ y = 0$ and $\frac{dy}{dt} = 0$ when $t = 0$.

(2+3)+5

(f) (i) Find : $L^{-1}\left\{\frac{5+s}{(s+1)\left(s^2+1\right)}\right\}$.

(ii) Using Laplace transformation, solve the differential equation

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4e^{2x};\ y(0) = -3$ and $y'(0) = 5$. 5+5

(g) (i) Prove or Disprove : A power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges for $x = x_0$, then it is absolutely convergent for every $x = x_1$, when $|x_1| < |x_0|$.

(ii) Test the convergence of the sequence of function $\{f_n\}_n$ where

$f_n(x) = \frac{x}{1+nx};\ n \in \mathbb{N};\ \forall x > 0.$ 5+5
